

e-mentor

DWUMIESIĘCZNIK SZKOŁY GŁÓWNEJ HANDLOWEJ W WARSZAWIE
WSPÓŁWYDAWCĄ: FUNDACJA PROMOCJI I AKREDYTACJI KIERUNKÓW EKONOMICZNYCH

2016, nr 4 (66)



M. Makiewicz, *Widzialne i niewidzialne piękno matematyki*, „e-mentor” 2016, nr 4(66), s. 4–12,
<http://dx.doi.org/10.15219/em66.1264>.



Widzialne i niewidzialne piękno matematyki

Małgorzata Makiewicz

Artykuł dotyczy fenomenu piękna matematyki dostępnego na poziomie estetycznym oraz na poziomie intelektualnym. Ma na celu ukazanie wybranych obiektów matematycznych ilustrowanych za pomocą ich widzialnych reprezentacji. W opracowaniu podjęto próbę zarysowania kilku aspektów dostrzegania i rozumienia estetyki matematyki w kontekście fotograficznych egzemplifikacji pojęć i prawidłowości. Wszystkie dołączone do tekstu fotografie wykonali uczestnicy Międzynarodowego Konkursu Fotograficznego „Matematyka w obiektywie”¹.

Piękno a kultura matematyczna

Piękno matematyki – fenomen nie dla każdego uchwytne, dla niektórych niedostrzegalny. Niekiedy związany z codzienną użytecznością, raczej z harmonią, doskonałością. Piękno, którego można doświadczać na różnych poziomach. Przy czym płaszczyzna estetyczna, do której można zaliczyć piękno obserwowalne za pomocą wzroku – np. piękno wielościanu gwiazdowego, trójkąta Sierpińskiego, regularnej spirali Archimedesesa czy wstęgi Möbiusa – nie jest wcale najważniejszą sprawą dla samych matematyków. Estetykę matematyki można rozpatrywać na poziomie intelektualnym: zachwycać się matematycznymi badaniami i ich efektami w postaci klarownego dowodu, harmonijnej konstrukcji, błyskotliwego pomysłu, zastosowaniem wyjątkowo prostej metody do rozwiązania skomplikowanego zagadnienia. Problem w tym, że do postrzegania piękna matematyki na poziomie wyższym niż wzrokowy potrzeba pewnego przygotowania merytorycznego. Trzeba znać teorie, klasyczne sposoby rozumowania, przykłady ich stosowania. Niezbędna jest tu również zdolność refleksji nad

istotą pojęć i rozumowań matematycznych². Na trudność precyzyjnego określenia relacji pomiędzy walorem estetycznym a poznawczym obiektu widzialnego zwrócił uwagę Arnold Berleant³. Zawikłanie dotyczy nie tylko materii postrzeganej w kategorii piękna, ale ujawnia się również w możliwościach jego odbierania kanałami asymilacyjnymi przez konkretnego człowieka.

Frantisek Kurina, ogłaszając *dekalog kultury matematycznej*⁴, do jej głównych atrybutów, obok posiadania wyobraźni, sprawnego posługiwania się językiem matematyki czy umiejętności dowodzenia, zaliczył postrzeganie jej piękna.

Podwójne kodowanie (obraz, tekst)

Formuła konkursu *Matematyka w obiektywie*, będąca pretekstem do zainteresowania wielu osób fotograficznymi reprezentacjami abstrakcyjnych bytów matematyki, okazała się trafna i potrzebna. Uczestnicy zgłaszający swoje prace⁵ nadają im autorskie tytuły i dodają do nich krótkie opisy. Jury, w skład którego wchodzi dydaktycy, fotograficy i naukowcy – w tym przedstawiciele matematyki, pedagogiki i mediologii – bierze pod uwagę stronę techniczną i estetyczną prac, ale przede wszystkim zwraca uwagę na walory poznawcze ujawnione za pomocą obrazu oraz tekstu.

Unikalną zasadą konkursu jest połączenie fotografii i autorskiej informacji o niej. Nadanie nazwy zmienia kategorię pracy z fotografii, która przemawia obrazem, na parę (zdjęcie, tekst), która kategoryzuje dzieło, nadając mu sens poznawczy. Na przykład zdjęcie

¹ Powszechny i bezpłatny konkurs *Matematyka w obiektywie* (www.mwo.univ.szczecin.pl) od roku 2010 corocznie organizowany przez Uniwersytet Szczeciński; wyróżniony patronatami: Ministerstwa Kultury i Dziedzictwa Narodowego, ministra Edukacji Narodowej, Rzecznika Praw Dziecka, marszałka województwa zachodniopomorskiego, prezydenta Miasta Szczecin, rektora Uniwersytetu Szczecińskiego, zachodniopomorskiego kuratora oświaty oraz prezesa Fundacji Książąt Czartoryskich.

² M. Makiewicz, *O fotografii w edukacji matematycznej. Jak kształtować kulturę matematyczną uczniów*, SKN MDM US, Szczecin 2013, s. 34.

³ A. Berleant, *Wrażliwość i zmysły. Estetyczna przemiana świata człowieka*, Universitas, Kraków 2011, s. 18.

⁴ F. Kurina, *Kultura matematyczna nauczyciela matematyki*, „Matematyka. Społeczeństwo. Nauczanie” 1991, nr 6, s. 30.

⁵ Prace zgłasza się za pośrednictwem aplikacji na stronie www.mwo.usz.edu.pl.

przedstawiające cztery koszyki pełne grzybów zyskuje sens poznawczy dzięki tytułowi „Suma zbiorów” i opisowi „suma zbiorów = wysiłek mamy + wysiłek taty + wysiłek dziecka⁶”, a obraz łyżwiarki podpierającej się w jednym punkcie podczas wykonywania obrotu – dzięki tytułowi „Cyrkiel⁷”.

Wykorzystywana w konkursie koncepcja podwójnego kodowania (*dual coding*) Allana Paivo⁸, obejmująca połączenie reprezentacji werbalnej i obrazowej, opiera się na współpracy dwóch systemów: *nastawionego na informację językową i posługującego się przedstawieniami werbalnymi, przetwarzanymi po kolei, i przetwarzającego informację odnoszącą się do konkretnych przedmiotów oraz wydarzeń w wyobrażeniach o naturze wizualnej*⁹. Połączenie to powoduje, że informacja może być przechowywana w postaci sądów, a jednocześnie informacja wzrokowa – w postaci wyobrażeń¹⁰. Można zatem mówić o nadaniu fotografii piękna poprzez opis. Zdarza się jednak, że tytuł jest tak dosłowny (nie wychodzi poza pierwszoplanowe ramy interpretacyjne), że zaniża lub wręcz odbiera wartość poznawczą pracy – np. fotografia płaskiej intarsji z drewnianych elementów w kształcie rombu, dająca efekt trójwymiarowości, zatytułowana „Drewniana podłoga” lub podpis „Muchomor” przypisany do wycinka sferycznego czerwonego kapelusza.

Systematycznie prowadzone badania hermeneutyczne¹¹, realizowane za pomocą analizy wytworów (fotografii konkursowych)¹² oraz analizy dokumentów (podpisów i opisów zdjęć) pozwoliły zgromadzić materiał jakościowy liczący ponad 20 tysięcy fotografii oraz komentarzy słownych (konkurs w ciągu sześciu lat z akcji regionalnej przerodził się w projekt międzynarodowy o dwudziestokrotnie większej liczbie uczestników). Podpisy i opisy nadsyłanych na konkurs fotografii ujawniały piękno samych obiektów, a także urok rozumowania matematycznego: oryginalne ujęcie tematów i metaforyczność myślenia autorów.

Wśród zgłoszonych prac odnotowano również pewne niedoskonałości i błędy związane z poznawaniem, wyobrażaniem i nazywaniem przez autorów

przedstawianych obiektów¹³. Pewne usterki językowe w opisach można rozpatrywać w kategoriach estetyki poznawczej. Przykładem może być fotografia przedstawiająca dziewczynę wyglądającą przez prostokątne okno, zatytułowana „Wpisana w kwadrat¹⁴”. Boki przedstawionego na fotografii prostokąta wyraźnie różnią się długością, a zatem okno nie jest kwadratem. Błądny z perspektywy formalnej tytuł prowokuje do konstruktywistycznych negocjacji znaczeń.

Czasami tytuł wskazuje na taki obiekt, którego nie widać na zdjęciu – np. fotografia pt. „Okrąg¹⁵” przedstawiająca ołówki położone w taki sposób, jakby były styczne do niewidocznego okręgu, lub fotografia zatytułowana „Środek odcinka¹⁶” pokazująca zarys gołębia trzymającego w dziobie patyczek dokładnie w jego połowie. Ten rodzaj wyobraźni matematycznej (łączącej wyobrażenia wzrokowe z werbalnymi), która odrywa się od widzialnego piękna, opisuje Roger Penrose: *Wyobrażam sobie, że ilekroć umysł postrzeża matematyczne pojęcie, styka się z platońskim światem idei [...]. Gdy ktoś „widzi” prawdę matematyczną, jego świadomość dociera do świata idei i nawiązuje z nim bezpośredni kontakt – świat ten staje się dlań dostępny za pośrednictwem intelektu [...]. Rozmowa między matematykami jest możliwa, ponieważ obaj mają bezpośredni dostęp do prawdy; świadomość każdego z nich może bezpośrednio postrzeżać matematyczne prawdy dzięki temu procesowi „widzenia” [...]. Istotnie, aktowi postrzegania świata prawdy często towarzysza słowa: „O, już widzę, o co chodzi”¹⁷.*

Podczas wszystkich edycji konkursu dokładnej analizie poddane zostały zarówno poprawne, jak i błędne pełne opisy¹⁸, jak również poszczególne części tych tekstów oraz wypowiedzi towarzyszące – np. wywiady z laureatami podczas uroczystego podsumowania konkursu. Wybór hermeneutycznej¹⁹ drogi badawczej na tym etapie umożliwił lepsze poznanie subiektywnego nastawienia i intencji osoby fotografującej. Proponowane przez Gillian Rose oddzielenie trzech obszarów: samego obrazu, jego wytwarzania oraz odbiorczości²⁰ pozwoliło na zbliżenie się do uchwycenia kontekstu pomysłu, planowania i wykonania fotografii.

⁶ Autor: Jan Łachiński, www.mwo.usz.edu.pl/galeria-prac-nagrodzonych/prace-2011.

⁷ Autorka: Anna Borkowska.

⁸ A. Paivio, *The relationship between verbal and perceptual codes*, [w:] M.P. Friedman (ed.), *Handbook of perception*, Vol. 8, *Perceptual coding*, Academic Press, New York 1978, s. 380.

⁹ D. Draaisma, *Machina metafor. Historia pamięci*, Aletheia, Warszawa 2009, s. 31.

¹⁰ Ph. Zimbardo, *Psychologia i życie*, PWN, Warszawa 2002, s. 377.

¹¹ Badania prowadzone w latach 2010–2015 podczas edycji I–VI konkursu *Matematyka w obiektywie*.

¹² P. Sztompka, *Socjologia wizualna. Fotografia jako metoda badawcza*, PWN, Warszawa 2005, s. 77–81.

¹³ M. Makiewicz, *Przykłady twórczych pomysłów uczniów fotografujących obiekty matematyczne*, [w:] W. Limont, J. Dreszer, J. Cieślakowska (red.), *Osobowościowe i środowiskowe uwarunkowania rozwoju ucznia zdolnego*, Wydawnictwo Naukowe UMK, Toruń 2010, s. 133.

¹⁴ Autorka: Barbara Grabowska, www.mwo.usz.edu.pl/galeria-prac-nagrodzonych/zdjecia-2010.

¹⁵ Autorka: Marta Strzelczyk, www.mwo.usz.edu.pl/galeria-prac-nagrodzonych/prace-2014.

¹⁶ Autorka: Ewa Woźniak, www.mwo.usz.edu.pl/galeria-prac-nagrodzonych/prace-2014.

¹⁷ R. Penrose, *Nowy umysł cesarza. O komputerach, umyśle i prawach fizyki*, PWN, Warszawa 1995, s. 469.

¹⁸ S. Phink, *Etnografia wizualna. Obrazy, media i przedstawienie w badaniach*, Wydawnictwo UJ, Kraków 2007, s. 122.

¹⁹ K. Ablewicz, *Hermeneutyka i fenomenologia w badaniach pedagogicznych*, [w:] S. Palka (red.), *Orientacje w metodologii badań pedagogicznych*, Wydawnictwo UJ, Kraków 1998.

²⁰ G. Rose, *Interpretacja materiałów wizualnych. Krytyczna metodologia badań nad wizualnością*, PWN, Warszawa 2010, s. 51–53.

W kolejnej części artykułu przedstawiono rolę fotografii jako narzędzia poznawczego wspomagającego dostrzeganie widzialnego i niedostrzegalnego piękna matematyki. Fragmenty wypowiedzi znawców sztuki fotografii, socjologów i mediologów zostały zilustrowane zdjęciami wykonanymi przez uczestników konkursu *Matematyka w obiektywie*.

Fotografia – narzędzie poznawcze

Obraz fotograficzny charakteryzuje się wysoką wiarygodnością. Andre Bazin podkreśla szczególnie i unikalny obiektywizm fotografii, nieistniejący w innych utworach plastycznych: *Nasz umysł krytyczny może nam podsunąć różne zastrzeżenia, lecz musimy wierzyć w istnienie przedmiotu przedstawionego na fotografii, to znaczy obecnego rzeczywiście w czasie i przestrzeni. Fotografia korzysta z tego, że realność przedmiotu przenosi się na jego reprodukcję*²¹. Fotografia stosowana w szkolnej edukacji matematycznej wpływa na rozwój kultury matematycznej nastolatka. Badania eksperymentalne prowadzone w Zakładzie Dydaktyki Matematyki Instytutu Matematyki Wydziału Matematyczno-Fizycznego Uniwersytetu Szczecińskiego potwierdziły wpływ metody fotoedukacji²² na rozwój języka i sprawności matematycznej gimnazjalistów, jak również ich wyobraźni, twórczości i elegancji myślenia matematycznego. Dla młodej osoby obraz fotograficzny wydaje się bardziej rzeczywisty od wizualizacji komputerowej, gdyż ma konkretne odniesienie do sytuacji realnej. Przykładowo fotografia przedstawiająca żdźbła ponad taflą idealnie płaskiego jeziora oraz ich odbicia w sposób naturalny i rzeczywisty ukazuje własności symetrii płaszczyznowej (rys. 1). Ciekawe kadrowanie skupia uwagę odbiorcy na deltoidach i odcinkach równoległych powstałych dzięki uchwyceniu przez fotografa odbicia lustrzanego na tafli wody.

Zdjęcie świata przyrody (oszroniona pajęczyna, rys. 2) wykonane zostało jesienią o poranku. Pierwszy jesienny chłód podkreślił kształt pajęczyny, dzięki czemu pomógł autorce odkryć spiralną budowę sie-

Rysunek 1. Water plant geometry, autor: Andrzej Osadczuk



Źródło: archiwum Międzynarodowego Konkursu Fotograficznego *Matematyka w obiektywie*, mwo.usz.edu.pl.

Rysunek 2. Zamrożona pajęczyna spirala, aktorka: Ewa Skrzypek



Źródło: archiwum Międzynarodowego Konkursu Fotograficznego *Matematyka w obiektywie*, mwo.usz.edu.pl.

ci. Jurorów zachwycała harmonia przyrody zapisana w języku matematyki.

Kolejna fotografia (rys. 3) przedstawia cień rzucany na kamienno-ceglaną ścianę z wyróżnionym zarysem okręgu. Autor zwrócił uwagę na niewidzialną na zdjęciu rodzinę cieni powstałych w wyniku zmiany kąta padania promieni słonecznych względem przeszkody (dachu sąsiadującego budynku). O dostrzeżeniu dynamicznej struktury (średnica, cięciwa, punkt styczności) świadczy autorski tytuł „Średnica pozorna”.

²¹ A. Bazin, *Ontologia obrazu fotograficznego*, [w:] M. Bogunia-Borowska, P. Sztompka (red.), *Fotospołeczeństwo. Antologia tekstów z socjologii wizualnej*, Wydawnictwo Znak, Kraków 2012, s. 424–425.

²² M. Makiewicz, *O fotografii w edukacji matematycznej. Jak kształtować kulturę matematyczną uczniów*, SKN MDM US, Szczecin 2013, s. 145–190.

²³ P. Bourdieu, *Społeczna definicja fotografii*, [w:] M. Bogunia-Borowska, P. Sztompka (red.), dz.cyt., s. 242.

Widzialne i niewidzialne piękno matematyki

Jak pisze Pierre Bourdieu: *fotografia [...] często jest wyrazem efemerycznych doznań, chwilowego zauroczenia, zaciekawienia lub zdarzenia losowego*²³. Przykładowo fotografia zatytułowana „Szybki fraktal” (rys. 4), wykonana podczas wyładowania atmosferycznego, oddaje zauroczenie autora chwilowym zjawiskiem pogodowym, które doskonale ilustruje samopodobieństwo. Autor zdjęcia przypisał sytuacji, w której uczestniczył, wysoką wartość poznawczą i artystyczną.

W kształceniu myślenia i rozwijaniu aktywności matematycznej szczególnie ważna jest umiejętność zadawania pytań i formułowania problemów. Fotografia może ilustrować postawione zagadnienie i ukazać innym wątpliwość autora (rysunek 5). W połączeniu z opisem słownym wskazuje i precyzuje problem. Tak, jak praca „Większa połowa?”, w której autor z przymrużeniem oka odnosi się do pojęcia połowy oraz otwiera serię pytań związanych z oświetleniem sfery.

Interioryzacja

Po treningu „otwierania oczu” na matematykę, obserwując z perspektywy obiektywu aparatu fotograficznego przyrodę martwą lub ożywioną albo dzieła umysłu i rąk ludzkich, dostrzegamy więcej niż zazwyczaj. To tak, jakby nasz umysł wyostrzał się w kierunku zarejestrowanej w obrazie matematyczności świata, jakby uczył się transferu pomiędzy pięknem oglądanym a pomyślanym. Mamy wtedy do czynienia z procesem interioryzacji wiedzy. W pierwszej chwili nasze oko wodzi po dominantach obrazu (rys. 6): widzimy dłoń człowieka z gałązką jakiejś rośliny. Dostrzegamy kolory, zarys liści. Nasze oko, jak pisze Jakub Bronowski, *dokonuje wnioskowań o świecie*²⁴. Rejestruje obraz na poziomie konkretnym, bez abstrakcyjnych nazw, metafor, związków i zależności. W tym czasie tworzą się *pierwszoplanowe ramy jego interpretacji*²⁵. Po chwili nasza uwaga koncentruje się na budowie przedstawionej rośliny. Odkrywamy, że każdy liść przypomina pomniejszony fragment gałązki. Zaczynamy w obrazie dostrzegać samopodobieństwo, a nie tę gałązkę.

Rysunek 3. Średnica pozorna, autor: Janusz Gołębiowski



Źródło: archiwum Międzynarodowego Konkursu Fotograficznego *Matematyka w obiektywie*, mwo.usz.edu.pl.

Rysunek 4. Szybki fraktal, autor: Łukasz Wojtas



Źródło: archiwum Międzynarodowego Konkursu Fotograficznego *Matematyka w obiektywie*, mwo.usz.edu.pl.

Rysunek 5. Większa połowa? autor: Tomasz Matejski



Źródło: archiwum Międzynarodowego Konkursu Fotograficznego *Matematyka w obiektywie*, mwo.usz.edu.pl.

²⁴ J. Bronowski, *Źródła wiedzy i wyobraźni*, PIW, Warszawa 1984, s. 134.

²⁵ R. Bohnsack, *Dokumentarna interpretacja obrazu – w stronę rekonstrukcji ikonicznych zasobów wiedzy*, [w:] S. Krzychała (red.), *Spółeczne przestrzenie doświadczenia – metoda interpretacji dokumentarnej*, Wydawnictwo Naukowe DSWE, Wrocław 2004.

Patrząc na ten sam obraz, zaczynamy wskazywać i nazywać reprezentacje obiektów matematycznych. Samodzielnie (a w warunkach szkolnych z pomocą dobrego nauczyciela) przenosimy akcent z interpretacji realistycznej w stronę interpretacji formalnej. Ten etap rozważanego procesu to *interpretacja obrazu w stronę wiedzy*, czyli analizowanie treści przez formalne reprezentacje obiektów matematycznych. Komentowanie związane jest z doświadczeniem unikalnego języka fotografii oraz uchwyceniem związków i relacji między pojęciami. Na tym etapie możemy swobodnie *oddychać przestrzenią stworzoną przez fotografię*²⁶, wyrażać swoje wątpliwości, stawiać pytania, a nawet unosić się poznawczo ponad dziełem. Piotr Sztompka zwraca uwagę na to, że obraz możemy czytać na różnych poziomach. Widzeniem nazywa *bierną rejestrację wrażeń wizualnych, które przepływają przed nami w niezwyklej mnogości i różnorodności w toku życia codziennego*. Patrzeniem zaś *intencjonalne, aktywne i selektywne poszukiwanie znaczących, ważnych doświadczeń wizualnych*²⁷. Rozumnie patrząc na fotografię, możemy odczytać z niej estetykę matematycznego poznania.

Francois Soulages stwierdza, że fotografia nie tylko pomaga ilustrować zagadnienie, ale również *stawia problem*. *Być może dlatego stawia problem w zakresie ogólnej teorii, którą można by w oparciu o nią stworzyć, i wyjątkowego wglądu, który uzyskujemy na podstawie danego zdjęcia, gdyż skłania do marzeń, działa w sferze naszej wyobraźni i nieświadomości, nawiedza naszą fantazję oraz imaginarium, stanowi kontinuum „widzialnego”, świecącą czarną dziurę, która wsysa nas w inną przestrzeń i czas, i która raz stawia nas wobec odmienności, to znowu przywraca nam tożsamość*²⁸. Wartość formułowanego problemu potęguje autorski tytuł zdjęcia wyrażający wątpliwość: „Czy to już fraktal?” (rys. 6).

Bernd Stiegler zwraca uwagę na to, że fotografia (oglądana) prowokuje do głębokiego namysłu w kierunku rozkodowania metafor autora: *uczy dostrzegania wielu aspektów obrazu, poziomów, głębi. Nakłania do zadawania szeregu pytań, do dociekliwości wywołanej chęcią poznania. Dosłowność, wierne oddanie obrazu zastanego dzięki fotografii ustępuje miejsca swoistym wydarzeniom*

*rozgrywającym się w umysłach: artyści i odbiorcy, uczenia i nauczyciela – fotografia zawdzięcza moc przemieniania rzeczywistości grze metaforami, które ze swej strony przemieniają fotografię i które – by wymienić tylko kilka przykładów – dostrzegają w niej techniczną formę zmartwychwstania albo balsamowanie, prawdziwą halucynację i kłamstwo albo dziejopisarkę i nową postać pamięci, objawienie albo trwanie Platońskiej jaskini*²⁹.

Kolejna fotografia – przedstawiająca ptaki nad morzem popołudniową porą (rys. 7) – koduje

Rysunek 6. „Czy to już fraktal?”, autor: Kazimierz Skurzyński



Źródło: archiwum Międzynarodowego Konkursu Fotograficznego *Matematyka w obiektywie*, mwo.usz.edu.pl

Rysunek 7. „15:50:00”, autorka: Marta Szymkiewicz



Źródło: archiwum Międzynarodowego Konkursu Fotograficznego *Matematyka w obiektywie*, mwo.usz.edu.pl

²⁶ M. Koziół, *Przedmowa do I. Jeffrey, Jak czytać fotografię. Lekcje mistrzów*, Universitas, Kraków 2009, s. 7.

²⁷ P. Sztompka, *Wyobraźnia wizualna i socjologia*, [w:] M. Bogunia-Borowska, P. Sztompka (red.), dz.cyt., s. 28.

²⁸ F. Soulages, *Estetyka fotografii, Strata i zysk*, Universitas, Kraków 1997, s. 5–7.

²⁹ B. Stiegler, *Obrazy w fotografii. Album metafor fotograficznych*, Universitas, Kraków 2009, s. 9.

Widzialne i niewidzialne piękno matematyki

w sobie metaforę zegara analogowego. Świadczy o tym autorski podpis „15:50:00”, który odsłania pomysł: skrzydła mewy ułożyły się tak, jak wskazówki zegara w chwili wykonania zdjęcia. Można mieć wrażenie, że metafora oddala nas od istoty pojęcia, ale w rzeczywistości jest to pozorny dystans, związany z wejściem na inny wymiar oglądu. Metafora, jak podkreśla Wiesława Limont, powoduje wywołanie odpowiednich wyobrażeń, pozwalając na lepsze oświetlenie i zrozumienie określonych zjawisk³⁰. Po doświadczeniu tych wyobrażeń obserwator wraca do poprzedniego wymiaru bogatszy w narzędzia interpretacyjne pomocne w swobodnym, ale poprawnym posługiwaniu się pojęciami abstrakcyjnymi. Dzieje się tak, ponieważ fotografia to reprezentacja natury samej w sobie, niezapośredniczona kopia świata realnego³¹. Jest niezastąpionym narzędziem w pracy umysłowej, jest formą naukowego myślenia [...] pozwalającą nam na uchwycenie i zrozumienie tego, co znajduje się poza obrębem możliwości pojęciowych. Za pomocą tego, co bliskie i co dobrze znamy, możemy nawiązać kontakt intelektualny z tym, co odległe, niejasne³².

Eksterioryzacja

Andreas Feininger zauważa, że wskaźnikiem dobrej fotografii jest osobiste zainteresowanie treścią wykonywanych zdjęć: [...] ktoś, kogo nie ciekawi materia, którą fotografuje, nigdy nie uzyska inspirujących, wzbudzających refleksję obrazów³³. Przykładem takiego osobistego zaangażowania jest praca wykonana nocą. Do dziecięcej karuzeli przyklejono dwie włączone latarki. Po wprowadzeniu konstrukcji w ruch obrotowy wykonano fotografię, stosując długi czas naświetlenia – rezultatem jest ukazanie okręgów współśrodkowych (rys. 8).

Zdaniem Piotra Sztompki zdjęcia dostarczają skrótowych, dobitnych ilustracji pojęć, modeli, teorii [...]. Sprowadzają abstrakcję na ziemię, pokazując, że wszystkie treści socjologiczne mają swoje wcielenia i są rozpoznawalne w zwykłym,

otaczającym nas świecie życia codziennego i relacji z innymi³⁴. Takie relacje szczególnie doceniają nauczyciele pracujący z małymi dziećmi. Na przykład, wykorzystując wiedzę na temat kinestetycznego poznawania rzeczywistości, proponują zabawę w prezentowanie poznawanych figur geometrycznych za pomocą zajmowanej pozycji względem innych dzieci (rys. 9).

Fotografia, jak pisze Susan Sontag, to również sposób wielorakiego zdobywania świata: może być zastępczym posiadaniem ukochanej osoby lub rzeczy,

Rysunek 8. „Okręgi też się lubią bawić”, autor: Tomasz Grewenda



Źródło: archiwum Międzynarodowego Konkursu Fotograficznego *Matematyka w obiektywie*, mwo.usz.edu.pl.

Rysunek 9. „Tajemniczy O-krąg”, autorka: Iwona Duran



Źródło: archiwum Międzynarodowego Konkursu Fotograficznego *Matematyka w obiektywie*, mwo.usz.edu.pl.

³⁰ W. Limont, *Poznawcze funkcje metafory*, [w:] M. Dudzikowa (red.), *Filozofia pedagogice. Pedagogika filozofii*, „Colloquia Communia” 2003 (numer specjalny), lipiec–grudzień, s. 168.

³¹ A. Sekula, *Spoleczne użycia fotografii*, Wydawnictwa Uniwersytetu Warszawskiego, Warszawa 2010, s. 13.

³² J. Ortega y Gasset, *Dwie wielkie metafory*, [za:] A. Góralski, *Teoria twórczości*, Wydawnictwo APS, Warszawa 2003, s. 43–44.

³³ A. Feininger, *Filozofia fotografowania*, [w:] M. Bogunia-Borowska, P. Sztompka (red.), dz.cyt., s. 428.

³⁴ P. Sztompka, *Wyobrażenia wizualna i socjologia*, dz.cyt., s. 36.

³⁵ S. Sontag, *Świat obrazów*, [w:] M. Bogunia-Borowska, P. Sztompka (red.), dz.cyt., s. 389.

posiadaniem, które nadaje zdjęciu charakter przedmiotu unikatowego, może być zdobyczą w konsumpcyjnym podejściu do wydarzeń, ale może być również źródłem informacji³⁵. Tak, jak powstała na drodze eksterioryzacji³⁶ fotografia (rys. 10) przedstawiająca zjawisko fizyczne talerzykowych zamrażania Bałtyku. Fotografia krążków lodowych była mocno przemyślana i dobrze zaplanowana. Autor (oceanograf) spędził kilka godzin zimą nad morzem, aby uchwycić (i przedstawić innym) to interesujące zjawisko.

Fotografia o zabarwieniu dydaktycznym daje wiele korzyści poznawczych. Podobnie jak w przypadku czystej foto-

Rysunek 10. Skołowany Bałtyk, autor: Olgierd Różycki



Źródło: archiwum Międzynarodowego Konkursu Fotograficznego *Matematyka w obiektywie*, mwo.usz.edu.pl.

Rysunek 11. „Kąt ostry”, autorka: Nela Sobotnik



Źródło: archiwum Międzynarodowego Konkursu Fotograficznego *Matematyka w obiektywie*, mwo.usz.edu.pl.

Rysunek 12. „Jednokładność graniastosłupów”, autorka: Kinga Kielan



Źródło: archiwum Międzynarodowego Konkursu Fotograficznego *Matematyka w obiektywie*, mwo.usz.edu.pl.

grafii socjologicznej pomaga zastosować różnego typu filtry poznawcze – w chaosie życia codziennego pomaga odróżnić, co jest istotne, a co nie. Wyjście w teren z kamerą natychmiast prowokuje aktywną intencjonalność i postawę poszukującą: mobilizuje patrzenie, a nie tylko widzenie. Dobra fotografia „dydaktyczna” to nie tylko ilustracja pojęcia czy twierdzenia (rys. 12), ale prowokacja do postawienia pytań (rys. 11) albo sprytna metafora werbalna (rys. 13).

Na zakończenie wernisażu tej niewielkiej matematycznej galerii warto jeszcze zwrócić uwagę na fotografię (rys. 14), która prawdopodobnie dla niewielu odbiorców łączy się z kategorią piękna. Przedstawia ona fragment metaloplastyki na drzwiach pewnej biblioteki berlińskiej. Tysiące osób przechodzą obok, ale tylko ten, kto jest zdolny zrozumieć piękno matematyki, dostrzeże na obrazku historyczny dowód twierdzenia Pitagorasa. Dokładnie taki, jaki zamieścił Euklides w swoich „Elementach”³⁷. Niewidzialne wprost piękno czystego rozumowania dedukcyjnego zakodowane poprzez obrazową metaforę.

³⁶ Proces prowadzący od wiedzy do jej ilustracji, wizualizacji.

³⁷ J. Czech, *Euklidesa początków geometrii ksiąg ośmiorn, to jest sześć pierwszych, jedenasta i dwunasta z dodaniami przypisami dla pożytku młodzi akademickiej wytłumaczone przez Józefa Czecha*, Józef Zawadzki, Wilno 1817, s. 50.

Widzialne i niewidzialne piękno matematyki

Rysunek 13. „Sushistyczne”, autorka: Julia Popławska-Latała



Źródło: archiwum Międzynarodowego Konkursu Fotograficznego *Matematyka w obiektywie*, mwo.usz.edu.pl.

Rysunek 14. „Symbolika matematyczna”, autor: Werner Schmid



Źródło: archiwum Międzynarodowego Konkursu Fotograficznego *Matematyka w obiektywie*, mwo.usz.edu.pl.

Podsumowanie

Krótkie rozważania o widzialnym i niewidzialnym pięknie matematyki warto zakończyć słowami A.L. Hammonda wypowiedzianymi, co prawda, trzydzieści lat temu, lecz nadal aktualnymi: *warto zapytać, czy matematyka jest nam istotnie odległa, czy tylko nie umiemy nawiązać z nią łączności. Może to tylko ignorancja, którą można uleczyć, a nie trwała niemożność ogranicza dziś u szerszej publiczności zdolność do należytej oceny i rozkoszowania się matematycznymi intuicjami. Może nasza kultura dopiero zbliża się do stanu, w którym matematyka będzie mogła rozpocząć szeroką penetrację świadomości społecznej*³⁸. W artykule starano się pokazać, że każdy może nawiązać

łączność z „myślą matematyczną”. Może to nastąpić np. w wyniku oczarowania pięknem widzialnym. Z przestrzeni zmysłowej można bowiem poszybować w krainę abstrakcji, gdzie estetyka myślenia, elegancja rozumowania określają warunki niewidzialnego piękna matematyki.

Bibliografia

Ablewicz K., *Hermeneutyka i fenomenologia w badaniach pedagogicznych*, [w:] S. Palka (red.), *Orientacje w metodologii badań pedagogicznych*, Wydawnictwo UJ, Kraków 1998.

Bazin A., *Ontologia obrazu fotograficznego*, [w:] M. Bogunia-Borowska, P. Sztompka (red.), *Fotospołeczeństwo. Antologia tekstów z socjologii wizualnej*, Znak, Kraków 2012.

Berleant A., *Wrażliwość i zmysły. Estetyczna przemiana świata człowieka*, przeł. S. Stankiewicz, Universitas, Kraków 2011.

Bohnsack R., *Dokumentarna interpretacja obrazu – w stronę rekonstrukcji ikonicznych zasobów wiedzy*, [w:] S. Krzychała (red.), *Spółeczne przestrzenie doświadczenia – metoda interpretacji dokumentarnej*, Wydawnictwo Naukowe DSWE, Wrocław 2004.

Bourdieu P., *Spółeczna definicja fotografii*, [w:] M. Bogunia-Borowska, P. Sztompka (red.), *Fotospołeczeństwo. Antologia tekstów z socjologii wizualnej*, Znak, Kraków 2012.

Bronowski J., *Źródła wiedzy i wyobraźni*, przeł. S. Amsterdamski, PIW, Warszawa 1984.

Czech J., *Euklidesa początków geometrii ksiąg ośmiorn, toiest sześć pierwszych, jedenasta i dwunasta z dodanemi przypisami dla pożytku młodzi akademikiem wytłumaczone przez Józefa Czecha*, Józef Zawadzki, Wilno 1817.

Draaisma D., *Machina metafor. Historia pamięci*, przeł. R. Pucek, Aletheia, Warszawa 2009.

Feininger A., *Filozofia fotografowania*, [w:] M. Bogunia-Borowska, P. Sztompka (red.), *Fotospołeczeństwo. Antologia tekstów z socjologii wizualnej*, Znak, Kraków 2012.

³⁸ A.L. Hammond, *Matematyka – nasza niedostrzegalna kultura*, [w:] L.A. Steen (red.), *Matematyka współczesna. Dwanaście esejów*, WNT, Warszawa 1983, s. 28.

Góralski A., *Teoria twórczości*, Wydawnictwo APS, Warszawa 2003.

Hammond A.L., *Matematyka – nasza niedostrzegalna kultura*, [w:] L.A. Steen (red.), *Matematyka współczesna. Dwanaście esejów*, WNT, Warszawa 1983.

Jeffrey I., *Jak czytać fotografię. Lekcje mistrzów*, przeł. J. Jedliński, Universitas, Kraków 2009.

Kurina F., *Kultura matematyczna nauczyciela matematyki*, „Matematyka. Społeczeństwo. Nauczanie” 1991, nr 6.

Limont W., *Poznawcze funkcje metafory*, [w:] M. Dudzikowa (red.), *Filozofia pedagogice. Pedagogika filozofii*, „Colloquia Communia” 2003 (numer specjalny), listopad–grudzień.

Makiewicz M., *Przykłady twórczych pomysłów uczniów fotografujących obiekty matematyczne*, [w:] W. Limont, J. Dreszer, J. Cieślakowska (red.), *Osobowościowe i środowiskowe uwarunkowania rozwoju ucznia zdolnego*, Wydawnictwo Naukowe UMK, Toruń 2010.

Makiewicz M., *O fotografii w edukacji matematycznej. Jak kształtować kulturę matematyczną uczniów*, SKN MDM US, Szczecin 2013.

Paivio A., *The relationship between verbal and perceptual codes*, [w:] M.P. Friedman (red.), *Handbook of perception*, Vol. 8, *Perceptual coding*, Academic Press, New York 1978.

Penrose R., *Nowy umysł cesarza. O komputerach, umyśle i prawach fizyki*, przeł. P. Amsterdamski, PWN, Warszawa 1995.

Phink S., *Etnografia wizualna. Obrazy, media i przedstawienie w badaniach*, Wydawnictwo UJ, Kraków 2007.

Rose G., *Interpretacja materiałów wizualnych. Krytyczna metodologia badań nad wizualnością*, PWN, Warszawa 2010.

Sekula A., *Społeczne użycia fotografii*, Wydawnictwa Uniwersytetu Warszawskiego, Warszawa 2010.

Sontag S., *Świat obrazów*, [w:] M. Bogunia-Borowska, P. Sztompka (red.), *Fotospołeczeństwo. Antologia tekstów z socjologii wizualnej*, Znak, Kraków 2012.

Soulages F., *Estetyka fotografii. Strata i zysk*, przeł. B. Mytych–Frajter, W. Formater, Universitas, Kraków 1997.

Stiegler B., *Obrazy w fotografii. Album metafor fotograficznych*, przeł. J. Czudec, Universitas, Kraków 2009.

Autorka jest doktorem habilitowanym nauk społecznych w dyscyplinie pedagogiki (dydaktyka matematyki), profesorem Uniwersytetu Szczecińskiego i kierownikiem Zakładu Dydaktyki Matematyki Instytutu Matematyki Wydziału Matematyczno-Fizycznego US. Jest także sekretarzem oddziału szczecińskiego Polskiego Towarzystwa Matematycznego, kierownikiem Międzynarodowego Projektu *Matematyka w obiektywie* i organizatorką cyklu konferencji dydaktyków matematyki *Matematyka – nasza niedostrzegalna kultura* (www.mnnk.usz.edu.pl). Jej zainteresowania badawcze koncentrują się wokół dydaktyki matematyki, kultury matematycznej, twórczości matematycznej uczniów, pedagogiki zdolności oraz fotoedukacji.

Visible and invisible beauty of Mathematics

The article deals with a beauty of mathematics as a phenomenon, which can be approached both from the aesthetic and intellectual levels. It has been illustrated by the series of photographs which are visual representations of the selected mathematical objects. The aim of the paper is to outline chosen aspects of perception and understanding of the aesthetics of mathematics in the context of photographic exemplification of concepts and patterns. All presented photographs have been taken by the participants of International Photography Competition „Mathematics in Focus”. The competition is organized regularly since 2010 by the University of Szczecin, Poland. Its popularity is growing systematically, what is reflected in the number of participants submitting their works: in 2010 there were 400 people who participated in the competition whereas in 2015 the total amount of them surpassed 8000. The gallery of all awarded works can be viewed at: <http://www.mwo.usz.edu.pl/galeria-prac-nagrodzonych>.

POLECAMY

Barbara Bray, Kathleen McClaskey, *How to Personalize Learning – a Practical Guide for Getting Started and Going Deeper*, Corwin Press, Thousand Oaks 2016

Jest to już druga książka napisana wspólnie przez B. Bray i K. McClaskey, a poświęcona personalizacji nauczania. W pierwszej, zatytułowanej *How to make learning personal* autorki przedstawiły koncepcję nauczania, w którym uwzględniane są indywidualne potrzeby i możliwości każdego ucznia. Tym razem idą o krok dalej i starają się pokazać, jak zmieniać kulturę nauczania i kulturę pracy szkoły, aby pozwalała ona na większą samodzielność uczących się i dawała im większy wpływ na kształtowanie własnej ścieżki edukacyjnej. Na podkreślenie zasługuje fakt, że proponowane rozwiązania to wynik wielu lat badań prowadzonych we współpracy ze szkołami, które starają się w praktyce stosować opisywane podejście. I właśnie przykłady z praktyki stanowią ogromną wartość tej publikacji.

Książka dostępna jest na stronie wydawcy: <https://us.corwin.com> lub na [amazon.com](https://www.amazon.com)